

APLICACIÓN DE LAS TÉCNICAS DE HOMOGENEIZACIÓN A LA DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES DE FLEXIÓN DE PLACAS NERVADAS

Avelino Samartín*, Miguel Lobo†, Jaime García Palacios‡

* Dr. Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

ETSI Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid

e-mail:avelino@otilio.mecanica.upm.es, página web: <http://otilio.mecanica.upm.es/~avelino>

† Dr. Ciencias Matemáticas

Facultad de Ciencias Matemáticas. Universidad de Cantabria

e-mail:lobom@unican.es

‡ Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

ETSI Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid

e-mail:jgpalacios@dumbo.caminos.upm.es, página web: <http://puertos.caminos.upm.es/~jaime>

Palabras clave: Placa de Reissner-Mindlin, Elementos finitos, Homogeneización, Constants efectivas.

Resumen. *Se estudia una placa tipo Mindlin, reforzada con nervios distribuidos de forma periódica según direcciones arbitrarias, mediante técnicas de homogeneización basadas en métodos de desarrollos asintóticos en escalas múltiples. Se obtiene de esta forma la matriz de rigidez de la placa homogeneizada que resulta ser dependiente de las características geométricas de la celda periódica, es decir, de su oblicuidad, forma en planta, variación de espesores etc., así como de las constantes elásticas del material. El cálculo de esta matriz se lleva a cabo mediante un promedio sobre el dominio de la celda de una combinación lineal de soluciones de diferentes problemas de contorno de flexión de placa sobre el dominio de la celda y con condiciones de contorno de tipo periódico. Cada uno de estos problemas de contorno corresponde a unas cargas aplicadas sobre la placa que son derivadas de las funciones D y D_0 constantes de flexión y de cortante de la placa. Finalmente se presenta un ejemplo que ilustra la aplicación de esta metodología.*

1 INTRODUCCIÓN

La losa delgada es una estructura bidimensional resultante de una idealización de un sólido cuya superficie media es un plano y con la dimensión normal a éste, denominada espesor, muy pequeña respecto a las otras dos. La losa se suele aligerar mediante alvéolos o bien reforzar con vigas según una o varias direcciones con objeto de disminuir su peso propio conservando su capacidad resistente. Por este motivo la losa aligerada representa un tipo estructural frecuentemente utilizado en la ingeniería civil. Dos ejemplos típicos son la losa ortótropa en los tableros de puentes y el forjado de piso en edificación conocido como forjado sin vigas. El análisis de este tipo de estructuras se puede llevar a cabo de forma natural mediante una discretización pormenorizada de todos los elementos de los que está constituido, es decir, introduciendo en el modelo de cálculo cada uno de los elementos losa y placa. Este procedimiento conlleva numerosas veces un excesivo esfuerzo de computación y a veces dificultades numéricas, ya que la superficie que cubre la losa es muy grande en relación con las dimensiones de los elementos estructurales básicos de la discretización, es decir, con las dimensiones de la celda compuesta de las vigas y de las placas elementales.

Una modelización alternativa a la indicada en la posibilidad anterior consiste en sustituir la placa aligerada o reforzada por otra *homogeneizada* constituida por un material ficticio cuyas características describen en forma promediada el comportamiento de la estructura original. Esta sustitución se facilita por existir en la losa una periodicidad geométrica de unos elementos, es decir, de la celda compuesta de vigas y placas, que se repite según una o varias direcciones. De esta forma el comportamiento global de la estructura puede estar adecuadamente simulado y así es posible su conexión a otros tipos estructurales que eventualmente formen parte del sistema completo estructural, puente o edificio, en los ejemplos citados. Una dificultad importante en esta sustitución de la losa real por otra equivalente de un material ficticio con unas propiedades elásticas no conocidas de antemano, reside en obtener éstas de modo que los comportamientos de la losa real y de la equivalente presenten unos resultados que sean los más parecidos posibles entre sí.

La determinación de las constantes elásticas que simulan una periodicidad geométrica de una losa constituye un problema de interés en el cálculo de estructuras. En la práctica profesional las constantes de este material ficticio se suelen evaluar de forma intuitiva y, en general, los resultados así obtenidos son adecuados y relativamente cercanos a los deducidos a partir de un modelo estructural pormenorizado.¹ No obstante a este hecho, existen situaciones en las que la intuición anterior exige ser complementada con criterios heurísticos de dudosa justificación. Entre las situaciones anteriores cabe destacar los casos de placas alveolares² o bien placas con

¹A veces el cálculo intuitivo de estas constantes elásticas de la estructura homogeneizada puede conducir a resultados incorrectos. Por ejemplo, en el caso sencillo de una barra de longitud L sometida a esfuerzo axial con una variación ε -periódica de su sección $A(x)$, es decir, que cumple, para todo valor x de la abscisa de la barra, $A(x) = A(x + \varepsilon)$ la sección que más adecuadamente simula el comportamiento global de la barra cuando el valor ε tiende a cero no es el valor medio o media aritmética de la sección en la longitud ε sino la media armónica en dicha longitud

²En el caso de existencia de alvéolos en la losa real la determinación promediada de las características, área,

más de dos familias de vigas entrecruzadas o con direcciones no ortogonales de nervios. Mención especial corresponde al estudio de la influencia en los esfuerzos, que se producen en una placa de hormigón armado, de la oblicuidad en planta de la armadura dispuesta en la misma. En estos y otros casos se precisa el uso de un método coherente que permita la determinación de las constantes equivalentes de la placa, capaces de simular adecuadamente su comportamiento real a extensión y a flexión. Además con un procedimiento de este tipo se podría evaluar el grado de aproximación alcanzado en la práctica profesional con los procedimientos intuitivos usuales y delimitar así el campo de validez de los mismos. La técnica que se utiliza con esta finalidad se basa en una serie de procedimientos matemáticos coherentes desarrollados a partir de la pasada década de los setenta, entre los que cabe citar los presentados en la pionera publicación [18] o en los excelentes textos [1] y [15]. Estos procedimientos constituyen en la actualidad una metodología bien establecida y conocida con el nombre de homogeneización de estructuras periódicas.

El método de homogeneización utiliza los desarrollos asintóticos en escalas múltiples para obtener la solución del problema de contorno que describe el problema elástico correspondiente, en el cual los coeficientes de las ecuaciones diferenciales son periódicos. Con este objeto se considera el procedimiento del doble escalado, es decir, se utiliza un sistema de coordenadas globales x_i que permiten describir el comportamiento macroscópico del problema elástico y otro de locales y_i que definen la solución aproximada obtenida dentro de una celda o solución microscópica. En la homogeneización se llega a una solución convergente que se obtiene a partir de los primeros términos del desarrollo asintótico y de un proceso de media en cada una de las celdas. Esta solución puede ser interpretada como la que rige el comportamiento global de la placa al tender a cero los periodos de las celdas.

Conviene tener en cuenta que el método de homogeneización permite deducir las características del comportamiento global de la estructura periódica cuando el período se hace muy pequeño. Es un método coherente y automático de cálculo de estas características, que si bien no conducen a resultados exactos, en el sentido de que sean iguales a los de la estructural real, pero si a resultados que serán más próximos a los valores exactos a medida que el número de celdas que componen la estructura real sea mayor. Es posible mejorar la aproximación mediante la introducción de correctores función del valor finito de los períodos.

El método de homogeneización ha representado a lo largo de los últimos años un área de intensa actividad investigadora. Restringiendo a su interacción con el análisis de estructuras y la elasticidad se puede citar los trabajos de Lewínski y Talega [11], [12], [10] y [13] y los de Sánchez-Palencia [19] y [4] y las recientes actas de conferencias y reuniones científicas [20] y [5] que describen el estado actual del método de la homogeneización.

La aplicación de las técnicas de homogeneización a las estructuras de placas con comporta-

inercia a flexión y torsión etc en la dirección ortogonal a la dirección del alvéolo puede conducir a resultados poco realistas. Una práctica heurística consiste en elegir una franja unitaria de laja en la dirección que se estudia y tratarla como una viga vierendel. La comparación de flechas entre esta viga y la análoga en la losa equivalente permite estimar las características del material de la losa homogénea equivalente. Ver por ejemplo el capítulo 6 de la referencia [16]

miento lineal se inició en las publicaciones [9] y [8], en las que se utilizaron resultados obtenidos por Ciarlet y sus colaboradores [6] y [7] que reducían mediante técnicas de desarrollos asintóticos el comportamiento 3-D de la placa a uno bidimensional, por lo que en estas publicaciones se partía directamente de las ecuaciones bidimensionales de la placa. Este planteamiento supone admitir la validez de la hipótesis de que los ordenes de magnitud de las dimensiones en planta ε_i de los períodos de la celda según las direcciones de periodicidad son muy grandes respecto al orden del espesor h de la placa.

Así como se puso de manifiesto en [9], si se hace primero $\varepsilon_i \rightarrow 0$ y luego $h \rightarrow 0$, lo que implica que los ordenes de magnitud de las celdas son pequeños respecto a los del espesor de la placa, entonces las constantes elásticas del modelo cambian. Es decir: El comportamiento global equivalente depende de la relación entre ε_i y h , puesto que los procesos al límite para $\varepsilon_i \rightarrow 0$ y luego $h \rightarrow 0$ no conmutan.

Si bien la mayor parte de los trabajos referentes a la homogeneización se han dirigido al estudio de sus fundamentos y a la convergencia del método tanto en situaciones lineales como no lineales, diversos trabajos de carácter experimental numérico, se han sucedido a partir de los pioneros de Bourgat [2]. Aquí se describe, desde un punto de vista de la práctica de la ingeniería, la aplicación del método de homogeneización a la determinación de las constantes de una placa a flexión. La aplicación del método al caso de la laja o losa sometida a esfuerzos de extensión o dentro del plano medio ha sido llevada a cabo con anterioridad en [14].

Dentro de la placa se va a considerar la teoría lineal y elástica, si bien con objeto de tener en cuenta situaciones de losas susceptibles de experimentar deformaciones por esfuerzo cortante, se estudia el modelo bidimensional de placa de Reissner-Mindlin, en lugar del modelo de Kirchhoff, en él que la deformación elástico por cortante es despreciable. Se supone como se ha indicado que se parte directamente del modelo bidimensional de placa, lo que implica que se supone que el tamaño de los períodos de las celdas es mucho mayor que el espesor de la placa.

Este trabajo se desarrolla de acuerdo con el siguiente esquema: Primeramente se resumen las ecuaciones fundamentales de la placa delgada a flexión de Reissner-Mindlin dentro de la teoría lineal y elástica, y con objeto de resaltar las diferencias de ésta con la más conocida de Kirchhoff se plantea también las de ésta. A continuación se describe la aplicación del método de homogeneización a la placa de Reissner-Mindlin así como la técnica de la determinación de las constantes elásticas equivalentes de la placa homogeneizada que en el límite permiten que ésta reproduzca el comportamiento de la losa real con celdas periódicas. Finalmente el método de homogeneización se aplica a un caso real de placa oblicua con nervios no ortogonales y los resultados obtenidos se comparan con los deducidos mediante un procedimiento heurístico. Unos comentarios finales cierran este trabajo.

2 ECUACIONES FUNDAMENTALES

Se considera inicialmente un sólido elástico que se define en un sistema de coordenadas cartesianas rectangular $\mathbf{x} = (x_i) = (x_1, x_2, x_3)$. Se utiliza el convenio de índices repetidos con índices griegos y latinos tomando los valores 1, 2 y 1, 2, 3 respectivamente. Las derivadas parciales respecto a una variable x_i se representan con el subíndice i precedido por una coma.

Las ecuaciones de equilibrio interno de un sólido 3-D son ([17]):

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (1)$$

y las ecuaciones constitutivas más generales de un material elástico se escriben:

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2)$$

que en el caso de isotropía se convierten en las siguientes:

$$\sigma_{ij} = \lambda e + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad (3)$$

con λ y μ las constantes de Lamé y ε_{ij} las deformaciones que se definen por las expresiones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4)$$

En las ecuaciones anteriores $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ son las componentes del tensor de tensiones, u_i las de los desplazamientos, $e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ la deformación volumétrica y f_i las componentes de las fuerzas másicas. Las constantes de Lamé se expresan en función del módulo de elasticidad E y del coeficiente de Poisson como sigue:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (5)$$

Una placa delgada es un sólido elástico que ocupa una región $\bar{\Omega} \times [-\frac{1}{2}h, \frac{1}{2}h]$ en R^3 , con $\bar{\Omega}$ un dominio en R^2 y h el espesor constante de la placa tal que satisface la condición:

$$0 < h \ll \text{diam } \bar{\Omega} \quad (6)$$

Los ejes Ox_1 y Ox_2 se sitúan en el dominio $\bar{\Omega}$ y normal al mismo el eje Ox_3 . El plano $x_3 = 0$ se denomina plano medio de la placa. En el caso de que la condición (6) no se satisfaga la placa se denomina gruesa.

Si se supone que la placa es delgada la pequeñez de su espesor permite un tratamiento elástico de la placa simplificando el problema elástico general al reducirlo a dos modelos bidimensionales: uno en extensión, denominado laja y otro en flexión conocido como placa y a veces como losa. En lo que sigue se considera únicamente el modelo 2-D de flexión o placa propiamente dicha constituida por un material isótropo y homogéneo, es decir, con sus propiedades elásticas en un punto independientes de las coordenadas del mismo.

En relación con el modelo 2-D de placa existen algunas variantes de acuerdo con el grupo de simplificaciones que se utilizan para su reducción de la situación 3-D a la 2-D. Los más utilizados son los dos siguientes:

1. Modelo de Kirchhoff de placa.

En este modelo se expresan los desplazamientos de acuerdo con la hipótesis cinemática de Kirchhoff en función de una única función, el desplazamiento normal al plano medio de la placa $w = u_3$, que depende de las coordenadas (x_1, x_2) del punto del plano medio, es decir:

$$u_\alpha = -x_3 u_{3,\alpha} = -x_3 w_{,\alpha}, \quad u_3 = u_3(x_i) = w \quad (7)$$

Si se consideran las ecuaciones (1), (3), (4) y (7) se obtiene la ecuación diferencial que rige el comportamiento elástico de una placa delgada, homogénea e isotrópica de Kirchhoff:

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{D} \quad \text{en } \bar{\Omega} \quad (8)$$

con Δ el operador laplaciano bidimensional en las coordenadas x_1, x_2 , p la carga resultante de las cargas sobre las dos caras de la placa $x_3 = \pm \frac{h}{2}$ medida por unidad de superficie en el punto y D es la constante de rigidez a flexión de la placa dada por la expresión:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (9)$$

Este modelo de Kirchhoff es utilizado frecuentemente en la práctica y produce resultados aceptables en placas delgadas de sección maciza. Sin embargo en él no se considera la deformación de cortante y además a partir de las hipótesis (7) y de las condiciones constitutivas (3) se deduce que en la placa ocurre que $\sigma_{3\alpha} = 0$. Por otra parte en este modelo se producen unas pocas inconsistencias matemáticas y la función incógnita básica $w(x_1, x_2)$ sólo puede satisfacer dos ecuaciones de condiciones en el contorno $\partial\bar{\Omega}$, en lugar de las tres que se intuyen físicamente.

2. Modelo de Reissner-Mindlin de placa

El conjunto de hipótesis cinemáticas (7) se modifica en este modelo por el siguiente:

$$u_\alpha = x_3 \theta_\alpha(x_i), \quad u_3 = w(x_i) \quad (10)$$

Las funciones incógnitas básicas son ahora los dos giros θ_α y la flecha w , que dependen de las coordenadas (x_1, x_2) del punto del plano medio.

Al promediar a través del espesor de la placa las ecuaciones (1), (3), (4) y (10) se puede describir este modelo mediante ecuaciones diferenciales de sexto orden, que permiten el planteamiento de las tres ecuaciones a lo largo del contorno. No obstante, continúan existiendo en este modelo ciertas inconsistencias al desprestigiar el término σ_{33} en las ecuaciones constitutivas.

En lo que sigue se considera, para el procedimiento de homogeneización que se describe en el siguiente apartado, la validez del modelo de Mindlin debido a su generalidad, ya que permite simular el modelo de Kirchhoff si se especifican unos valores límites de las constantes del material.

3. HOMOGENEIZACIÓN

3.1 Ecuaciones de la placa

Se definen los esfuerzos y las acciones exteriores en la placa por medio de las expresiones siguientes:

- Momentos flectores y torsor

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad (11)$$

- Esfuerzos cortantes

$$Q_\alpha = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{3\alpha} dx_3 \quad (12)$$

- Fuerzas exteriores

$$Z = -\frac{1}{h} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f_3 dx_3 + [t_{33}]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \right) \quad (13)$$

siendo t_{33} las tensiones normales aplicadas a las caras superior e inferior de la placa.

- Momentos exteriores

$$G_\alpha = -\frac{1}{h} \left(\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_3 f_\alpha dx_3 + [x_3 t_{3\alpha}]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \right) \quad (14)$$

siendo $t_{3\alpha}$ las tensiones tangenciales en la dirección α aplicadas a las caras superior e inferior de la placa.

Al utilizar las definiciones anteriores las ecuaciones de equilibrio (1) se transforman tras la integración a través del espesor en las siguientes:

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = G_\alpha, \quad Q_{\beta,\beta} = Z \quad (15)$$

Las ecuaciones constitutivas se deducen al considerar las expresiones (10) a (14) en la integral a través del espesor de la (3), obteniéndose en el caso general de material elástico ecuaciones del tipo:

$$M_{\alpha\beta} = \bar{a}_{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\gamma\delta}, \quad Q_\alpha = \bar{a}_{3\alpha\beta} k_\beta \quad (16)$$

con $\bar{a}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ constantes elásticas del material y k_α y $k_{\alpha\beta}$ son las deformaciones de placa. En el caso particular de material isótropo las anteriores ecuaciones se reducen a las siguientes:

$$M_{\alpha\beta} = \nu D k_{\delta\alpha\beta} + D(1 - \nu) k_{\alpha\beta}, \quad Q_\alpha = D_0 k_\alpha \quad (17)$$

siendo $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ y $D_0 = \frac{5}{6} \left[\frac{Eh}{2(1 + \nu)} \right]$ las constantes elásticas de la placa y $k = k_{\alpha,\alpha} = k_{11} + k_{22}$. Las deformaciones de la placa k_α y $k_{\alpha\beta}$ se definen por la expresiones:

$$k_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\theta_{\alpha,\beta} + \theta_{\beta,\alpha}), \quad k_\alpha = \theta_\alpha + w_{,\alpha} \quad (18)$$

3.2 Desarrollo asintótico

Se considera una placa delgada de espesor h variable, que sea una función arbitraria de las coordenadas (x_1, x_2) del punto de su plano medio, pero restringida a ser periódica según las dos

direcciones de los ejes de coordenadas Ox_1x_2 , tal como se muestra en la figura (1) con períodos respectivos $(\varepsilon_1$ y ε_2). Matemáticamente se expresa esta periodicidad como sigue:

$$h(\mathbf{x}) = h(x_1, x_2) = h(y_1 + m\varepsilon_1, y_2 + n\varepsilon_2) = h(y_1, y_2) \quad (19)$$

siendo (y_1, y_2) las coordenadas del punto $(x_1, x_2) \in \Omega^\varepsilon$ referidas a unos ejes de coordenadas locales Oy_1y_2 que permiten definir todos los puntos de la celda elemental infinitesimal Ω^ε . Los períodos ε_1 y ε_2 se determinan como

$$\varepsilon_\alpha = \max_{j,k} \|y_i^j - y_i^k\| \quad \alpha = 1, 2$$

con y_α^j y y_i^k las coordenadas y_α de puntos P_i y P_j pertenecientes a Ω^ε . Los valores de m y n son números enteros cualesquiera.³

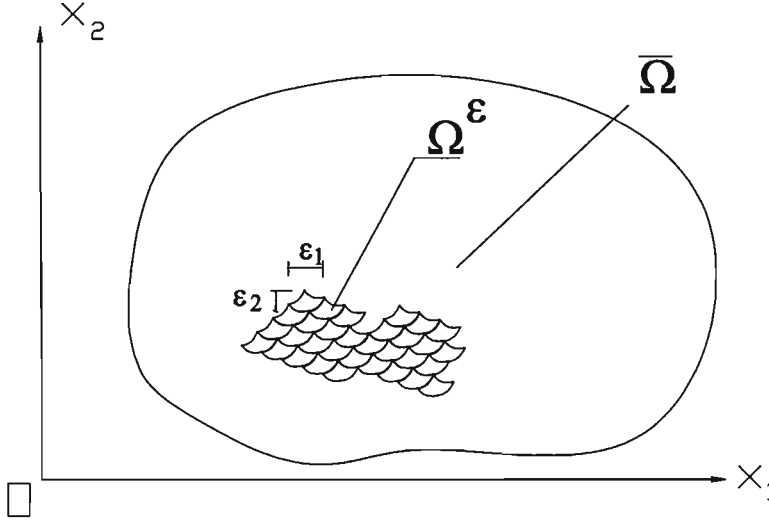


Figura 1. Placa de espesor variable periódico

Por consiguiente, la ley de espesores de la placa está totalmente determinada si se conoce la función $h(y_1, y_2)$ en la celda elemental Ω^ε con $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega^\varepsilon$. Todas las celdas elementales son geométicamente idénticas entre si y su unión es el dominio de la placa y no existe intersección entre ellas, es decir:

$$\bigcup_i \Omega_i^\varepsilon = \bar{\Omega}, \quad \Omega_i^\varepsilon \cap \Omega_j^\varepsilon = \emptyset \quad \text{para } \forall i \text{ y } j \quad (i \neq j)$$

siendo $\bar{\Omega}$ el dominio de la placa delgada y Ω_i^ε el de la celda elemental definidos por las coordenadas globales x_{1i}, x_{2i} . Por otra parte, las cargas actuantes se suponen que, en general, no son periódicas.

³Las coordenadas generales (x_1, x_2) permiten identificar la celda y las locales (y_1, y_2) los distintos puntos de la misma

Con objeto de poner de relieve el hecho de que la sección de la placa es variable de acuerdo con una función que es periódica según dos direcciones y_1 y y_2 , propiedad que se denomina ε -periódica, se escriben las ecuaciones de la placa (11) a (18) con un superíndice ε . En particular se expresan las ecuaciones de equilibrio como sigue:

$$M_{\alpha\beta,\beta}^\varepsilon - Q_\alpha^\varepsilon = G_\alpha, \quad Q_{\beta,\beta}^\varepsilon = Z \quad \text{en } \Omega \quad (20)$$

y las constitutivas en el caso de material isótropo

$$M_{\alpha\beta}^\varepsilon = \nu D k_\alpha^\varepsilon \delta_{\alpha\beta} + D(1 - \nu) k_{\alpha\beta}^\varepsilon, \quad Q_\alpha = D_0 k_\alpha^\varepsilon \quad \text{en } \Omega \quad (21)$$

siendo ahora D y D_0 las características de la placa que dependen de forma ε -periódica de las variables $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Las deformaciones se expresan en función de los movimientos de la placa mediante las ecuaciones (18) que se escriben como sigue:

$$k_{\alpha\beta}^\varepsilon = \frac{1}{2}(\theta_{\alpha,\beta}^\varepsilon + \theta_{\beta,\alpha}^\varepsilon), \quad k_\alpha^\varepsilon = \theta_\alpha^\varepsilon + w_{,\alpha}^\varepsilon \quad (22)$$

en las que los movimientos son funciones de las coordenadas $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, es decir:

$$\theta_\alpha^\varepsilon = \theta_\alpha^\varepsilon(\mathbf{x}) = \theta_\alpha^\varepsilon(x_1, x_2), \quad w^\varepsilon = w^\varepsilon(\mathbf{x}) = w^\varepsilon(x_1, x_2)$$

Para la determinación de los movimientos incógnitas anteriores además de las ecuaciones de equilibrio y constitutivas, se hace preciso introducir las condiciones de contorno. Se supone, si bien no es fundamental para el problema de homogeneización, que existe empotramiento total a lo largo de la frontera del dominio $\bar{\Omega}$ de la placa, es decir, se consideran las condiciones de contorno de Dirichlet:

$$\theta_\alpha|_{\partial\bar{\Omega}} = 0, \quad w|_{\partial\bar{\Omega}} = 0 \quad (23)$$

Con objeto de utilizar las técnicas de los desarrollos asintóticos en la resolución del problema definido por las ecuaciones (20) a(23) se introducen unas coordenadas locales $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ en una celda Ω^ε con las formulas de paso siguientes (figura 2):

$$y_1 = \frac{1}{\varepsilon} x_1, \quad y_2 = \frac{1}{\varepsilon} x_2 \quad (24)$$

con $\varepsilon_1 = a\varepsilon$ y $\varepsilon_2 = b\varepsilon$.

Las fórmulas (24) representan una transformación afín, que se modifica en una homotecia si se elige el origen de coordenadas locales el punto de intersección de las curvas equidistantes de los contornos opuestos. Mediante esta transformación la celda elemental Ω^ε se amplifica en otra de referencia que se designa por Ω y se puede suponer que corresponde a $\varepsilon = 1$.

En estas condiciones se plantea el siguiente desarrollo asintótico para la solución del problema de contorno definido por las ecuaciones (20) a(23) y que se recoge en el vector $\mathbf{v}^\varepsilon = (\theta_1^\varepsilon, \theta_2^\varepsilon, w^\varepsilon)^T$

$$\mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) = v_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{v}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{v}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (25)$$

En el desarrollo (25) $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ representa la solución homogeneizada del problema de contorno anteriormente definido, y describe en valores medios el comportamiento macroscópico de la

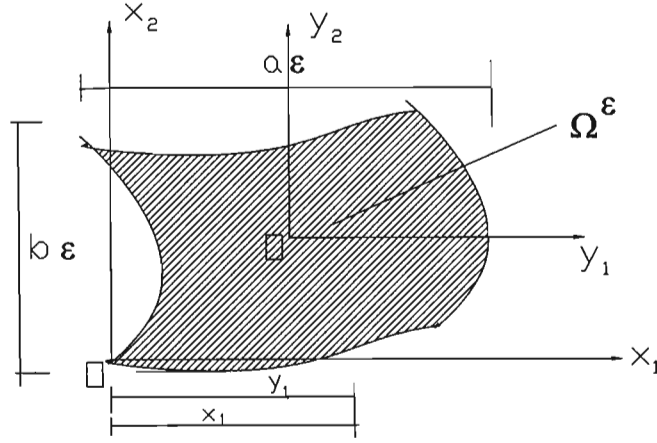


Figura 2. Dominio elemental de la placa periódica

placa al tender el pequeño parámetro ε a cero. Los restantes términos muestran por una parte su carácter corrector de la solución media anterior y por otra la doble dependencia de la solución de las coordenadas globales \mathbf{x} que definen cada celda y de las locales \mathbf{y} dentro de la celda definida.

A partir del desarrollo (25) se obtienen los desarrollos de los momentos torsores y flectores:

$$M_{\alpha\beta}^\varepsilon(\mathbf{x}) = M_{\alpha\beta}^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon M_{\alpha\beta}^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 M_{\alpha\beta}^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (26)$$

y análogamente los de los esfuerzos cortantes:

$$Q_\alpha^\varepsilon(\mathbf{x}) = Q_\alpha^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon Q_\alpha^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 Q_\alpha^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (27)$$

Las expresiones de los distintos términos del desarrollo de los esfuerzos, momentos y cortantes, en función de los desplazamientos se deducen haciendo uso de las ecuaciones constitutivas de la placa (21), para lo cual se precisa determinar primeramente las deformaciones por medio de las relaciones (22). En la deducción de las expresiones que sigue se hace uso de las siguientes igualdades:

$$\frac{d}{dx_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial y_\beta} \frac{\partial y_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

mediante las cuales se obtiene:

$$k_{\alpha\beta}^\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \theta_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \theta_\beta^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \theta_\alpha^\varepsilon}{\partial y_\beta} + \frac{\partial \theta_\beta^\varepsilon}{\partial y_\alpha} \right) \right] \quad (28)$$

$$k_\alpha^\varepsilon = \theta_\alpha^\varepsilon + \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_\alpha} \quad (29)$$

Las relaciones (28) y (29) entre deformaciones y desplazamientos se escriben en la forma:

$$k_{\alpha\beta}^\varepsilon = k_{\alpha\beta}^x + \frac{1}{\varepsilon} k_{\alpha\beta}^y, \quad k_\alpha^\varepsilon = k_\alpha^x + \frac{1}{\varepsilon} k_\alpha^y \quad (30)$$

siendo

$$k_{\alpha\beta}^x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \theta_\beta^\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right), \quad k_{\alpha\beta}^y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta_\alpha^\varepsilon}{\partial y_\beta} + \frac{\partial \theta_\beta^\varepsilon}{\partial y_\alpha} \right) \quad (31)$$

$$k_\alpha^x = \theta_\alpha^\varepsilon + \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial x_\alpha}, \quad k_\alpha^y = \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial y_\alpha}, \quad k^x = k_{11}^x + k_{22}^x, \quad k^y = k_{11}^y + k_{22}^y \quad (32)$$

Si se considera el desarrollo (25) en las expresiones anteriores de las deformaciones se obtiene:

$$k_{\alpha\beta}^\varepsilon = [k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_0) + \varepsilon k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_1) + \varepsilon^2 k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_2) + \dots] + [k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_1) + \varepsilon k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_2) + \dots] \quad (33)$$

$$k_\alpha^\varepsilon = [k_\alpha^x(\mathbf{v}_0) + \varepsilon k_\alpha^x(\mathbf{v}_1) + \varepsilon^2 k_\alpha^x(\mathbf{v}_2) + \dots] + [k_\alpha^y(\mathbf{v}_1) + \varepsilon k_\alpha^y(\mathbf{v}_2) + \dots] \quad (34)$$

Las ecuaciones constitutivas de la placa (21) se transforman en las siguientes al introducir en ellas las (33) y 34 y comparar el desarrollo resultante con los de la ecuaciones (26) y (27) cada término en ε . (El desarrollo se limita a los dos primeros términos, ε^0 y ε^1):

$$M_{\alpha\beta}^0 = \delta_{\alpha\beta} \nu D [k^x(\mathbf{v}_0) + k^y(\mathbf{v}_1)] + D(1 - \nu) [k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_0) + k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_1)] \quad (35)$$

$$M_{\alpha\beta}^1 = \delta_{\alpha\beta} \nu D [k^x(\mathbf{v}_1) + k^y(\mathbf{v}_2)] + D(1 - \nu) [k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_1) + k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_2)] \quad (36)$$

$$Q_\alpha^0 = D_0 [k_\alpha^x(\mathbf{v}_0) + k_\alpha^y(\mathbf{v}_1)] + D(1 - \nu) [k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_0) + k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_1)] \quad (37)$$

$$Q_\alpha^1 = D_0 [k_\alpha^x(\mathbf{v}_0) + k_\alpha^y(\mathbf{v}_1)] + D(1 - \nu) [k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_1) + k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_2)] \quad (38)$$

Las ecuaciones de equilibrio (20) se convierten, al tener en cuenta el uso de las coordenadas x e y , en las siguientes:

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}^\varepsilon}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial M_{\alpha\beta}^\varepsilon}{\partial y_\beta} - Q_\alpha^\varepsilon = G_\alpha \quad (39)$$

$$\frac{\partial Q_\alpha^\varepsilon}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial Q_\alpha^\varepsilon}{\partial y_\alpha} = Z \quad (40)$$

Al introducir en estas ecuaciones de equilibrio los desarrollos (35) a (38) e identificar coeficientes de acuerdo con las potencias de ε se deducen las siguientes ecuaciones:

$$\text{Coeficiente de } \varepsilon^{-1}: \quad \frac{\partial M_{\alpha\beta}^0}{\partial y_\beta} = 0, \quad \frac{\partial Q_\beta^0}{\partial y_\beta} = 0 \quad (41)$$

$$\text{Coeficiente de } \varepsilon^0: \quad \frac{\partial M_{\alpha\beta}^1}{\partial y_\beta} + \frac{\partial M_{\alpha\beta}^0}{\partial x_\beta} - Q_\alpha^0 = G_\alpha, \quad \frac{\partial Q_\beta^1}{\partial y_\beta} + \frac{\partial Q_\beta^0}{\partial x_\beta} = Z \quad (42)$$

Las ecuaciones (41), resultantes de la identificación de los coeficientes de ε^{-1} , representan un problema periódico en la variable $y \in \Omega$ correspondiente al dominio Ω^ε amplificado al

dominio unitario. Estas ecuaciones se pueden escribir al introducir las (35) y (37) en la forma:

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \{ \nu D [k^x(\mathbf{v}_0) + k^y(\mathbf{v}_1)] \} + \frac{\partial}{\partial y_\beta} \{ D(1 - \nu) [k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_0) + k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_1)] \} = 0 \quad (43)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \{ D_0 [k_\alpha^x(\mathbf{v}_0) + k_\alpha^y(\mathbf{v}_1)] \} = 0 \quad (44)$$

En estas ecuaciones (43) y (44) ν , D y D_0 son variables en Ω con posibles discontinuidades. Las condiciones de contorno son periódicas y estas ecuaciones se pueden plantear pasando todos los términos dependiente de \mathbf{v}_0 al segundo miembro, con lo que resulta:

$$\begin{aligned} \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \nu D k^y(\mathbf{v}_1) + \frac{\partial}{\partial y_\beta} D(1 - \nu) k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_1) = \\ = -\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial y_\beta} \nu D k^y(\mathbf{v}_0) - \frac{\partial}{\partial y_\beta} D(1 - \nu) k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_0) \end{aligned} \quad (45)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} D_0 k_\alpha^y(\mathbf{v}_1) = -\frac{\partial}{\partial y_\alpha} D_0 k_\alpha^y(\mathbf{v}_0) \quad (46)$$

La forma variacional o débil de las ecuaciones (43) y (44) al considerar la funciones $v^*(\mathbf{y})$ como funciones de prueba, con $v^*|_{\partial\Omega} = 0$, es:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \delta_{\alpha\beta} \nu D k^y(\mathbf{v}_1) k^y(\mathbf{v}^*) d\mathbf{y} + \int_{\Omega} D(1 - \nu) k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_1) k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}^*) d\mathbf{y} = \\ = -k^x(\mathbf{v}_0) \delta_{\alpha\beta} \int_{\Omega} \nu D k^y(\mathbf{v}^*) d\mathbf{y} - k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_0) \int_{\Omega} (1 - \nu) D k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}^*) d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (47)$$

$$\int_{\Omega} D_0 k_\alpha^y(\mathbf{v}_1) k_\alpha^y(\mathbf{v}^*) d\mathbf{y} = -k_\alpha^x(\mathbf{v}_0) \int_{\Omega} D_0 k_\alpha^y(\mathbf{v}^*) d\mathbf{y} \quad (48)$$

con $d\mathbf{y} = dy_1 dy_2$ el área del elemento diferencial de Ω .

3.3 Técnica de homogeneización

En la aplicación de la técnica de homogeneización se procede en dos pasos. El primero consiste en resolver las ecuaciones variacionales (47) y (48), es decir, expresar la solución \mathbf{v}_1 en Ω en términos de la solución homogeneizada \mathbf{v}_0 . En el segundo paso se procede mediante un paso al límite a obtener la relación de rigidez en la solución homogeneizada, o sea, la relación entre esfuerzos y deformaciones de la placa.

Dentro del primer paso de la homogeneización se procede para resolver las ecuaciones (47) y (48) a sumarmas y así componer la siguiente única ecuación variacional vectorial de dimensión 3, correspondiente a las tres componentes del vector incógnita $\mathbf{v}_1(\mathbf{y})$.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \delta_{\alpha\beta} \nu D k^y(\mathbf{v}_1) k^y(\mathbf{v}^*) dy + \int_{\Omega} D(1-\nu) k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_1) k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}^*) dy \\
& + \int_{\Omega} D_0 k_{\alpha}^y(\mathbf{v}_1) k_{\alpha}^y(\mathbf{v}^*) dy = -k^x(\mathbf{v}_0) \delta_{\alpha\beta} \int_{\Omega} \nu D k^y(\mathbf{v}^*) dy \\
& - k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_0) \int_{\Omega} D(1-\nu) k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}^*) dy - k_{\alpha}^x(\mathbf{v}_0) \int_{\Omega} D_0 k_{\alpha}^y(\mathbf{v}^*) dy
\end{aligned} \tag{49}$$

La solución de esta ecuación variacional resultante (49) se determina como combinación lineal de soluciones de diferentes problemas unitarios con condiciones periódicas en el contorno $\partial\Omega$ que se describen a continuación.

- Un primer grupo de cuatro problemas cuyas soluciones $\mathbf{v}_1(\mathbf{y})$ se designan con la notación \mathbf{v}^{AB} con $A, B = 1, 2$. El vector solución \mathbf{v}^{AB} satisface a la ecuación variacional resultante como suma de las ecuaciones (47) y (48) en las que se suponen los valores siguientes:
 - $k_{\alpha\beta}^x = 1$ si $\alpha = A$ y $\beta = B$
 - $k_{\alpha\beta}^x = 0$ si $\alpha \neq A$ o $\beta \neq B$
 - $k_{\alpha}^x = 0$ para todos los valores de α .
- Un segundo grupo de dos problemas con sendas soluciones que se representan por \mathbf{v}^{3A} , con $A = 1, 2$ y satisfacen cada una la ecuación variacional resultante de la suma de las (47) y (48) con los siguientes datos:
 - $k_{\alpha\beta}^x = 0$ para todos los valores de α y β
 - $k_{\alpha}^x = 1$ para $\alpha = A$
 - $k_{\alpha}^x = 0$ para $\alpha \neq A$

Las soluciones anteriores son únicas, salvo una constante, y se recogen en los vectores siguientes:

$$\mathbf{v}^{AB}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \theta_1^{AB} \\ \theta_2^{AB} \\ w^{AB} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}^{3A}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} \theta_1^{3A} \\ \theta_2^{3A} \\ w^{3A} \end{bmatrix} \tag{50}$$

Conviene interpretar, desde el punto de vista de cálculo de estructuras, el procedimiento de solución anterior. En primer lugar el primer miembro de la ecuación variacional resultante de las (47) y (48) representa la ecuación variacional que rige el comportamiento de una placa de dominio Ω con condiciones de contorno periódicas que está sometida a unas acciones expresadas en el segundo miembro de la ecuación citada y que se interpretan a continuación para cada uno de las seis soluciones buscadas $\mathbf{v}^{\alpha\beta'}$ y $\mathbf{v}^{3\alpha}$ como sigue:

1. En la solución \mathbf{v}^{11} el segundo miembro es

$$- \int_{\Omega} \nu D \left(\frac{\partial \theta_1^*}{\partial y_1} + \frac{\partial \theta_2^*}{\partial y_2} \right) dy - \int_{\Omega} (1-\nu) D \frac{\partial \theta_1^*}{\partial y_1} dy$$

que se modifica, al integrar por partes y tener en cuenta la condición de contorno $\mathbf{v}^*|_{\partial\Omega} = 0$, en la siguiente expresión:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial D}{\partial y_1} \theta_1^* + \frac{\partial \nu D}{\partial y_2} \theta_2^* \right) dy$$

Por consiguiente la carga actuante sobre la placa es una distribución de momentos defined por la expresión $G_1 = \frac{\partial D}{\partial y_1}$ y $G_2 = \frac{\partial \nu D}{\partial y_2}$.

2. Análogamente en la solución \mathbf{v}^{22} el segundo miembro es:

$$- \int_{\Omega} \nu D \left(\frac{\partial \theta_1^*}{\partial y_1} + \frac{\partial \theta_2^*}{\partial y_2} \right) dy - \int_{\Omega} (1 - \nu) D \frac{\partial \theta_2^*}{\partial y_2} dy$$

que se modifica en

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial \nu D}{\partial y_1} \theta_1^* + \frac{\partial D}{\partial y_2} \theta_2^* \right) dy$$

es decir, en este caso la carga es la distribución de momentos $G_1 = \frac{\partial \nu D}{\partial y_1}$ y $G_2 = \frac{\partial D}{\partial y_2}$.

3. Tanto en la solución \mathbf{v}^{12} como en la \mathbf{v}^{21} el segundo miembro es

$$-\frac{1}{2} \int_{\Omega} (1 - \nu) D \left(\frac{\partial \theta_1^*}{\partial y_2} + \frac{\partial \theta_2^*}{\partial y_1} \right) dy \Rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial (1 - \nu) D}{\partial y_2} \theta_1^* + \frac{\partial (1 - \nu) D}{\partial y_1} \theta_2^* \right) dy$$

o lo que es equivalente el caso de carga corresponde a la distribución de momentos $G_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial (1 - \nu) D}{\partial y_2}$ y $G_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial (1 + \nu) D}{\partial y_1}$.

4. La solución \mathbf{v}^{31} se produce con un segundo miembro dado por la expresión:

$$- \int_{\Omega} D_0 \frac{\partial w^*}{\partial y_1} dy \Rightarrow \int_{\Omega} \frac{\partial D_0}{\partial y_1} w^* dy$$

es decir, cuando la placa está solicitada por una distribución de cargas verticales $Z = \frac{\partial D_0}{\partial y_1}$.

5. Finalmente la solución \mathbf{v}^{32} ocurre de forma semejante cuando las cargas son $Z = \frac{\partial D_0}{\partial y_2}$.

Por consiguiente, el vector $\mathbf{v}_1 = (\theta_1^1, \theta_2^1, w^1)^T$ se expresa, dada la linealidad del problema variacional, en función del vector incógnita $\mathbf{v}_0 = (\theta_1^0, \theta_2^0, w^0)^T$ como sigue:

$$\mathbf{v}_1 = k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_0) \mathbf{v}^{\alpha\beta}(\mathbf{y}) + k_{\alpha}^x(\mathbf{v}_0) \mathbf{v}^{3\alpha}(\mathbf{y}) \quad (51)$$

Para determinar el vector \mathbf{v}_0 se utiliza el segundo grupo de ecuaciones de equilibrio correspondientes a la identificación de coeficientes de las potencias de ε^0 , es decir, las ecuaciones (42). Este sistema de ecuaciones se modifica por medio de un proceso de paso al límite formal.

Este proceso implica el cálculo de la media sobre la celda Ω y se representa esta operación por el símbolo \sim . Resulta entonces:

$$\frac{\partial M_{\alpha\beta}^0 \sim}{\partial x_\beta} - Q_\alpha^0 \sim = G_\alpha, \quad \frac{\partial Q_\beta^0 \sim}{\partial x_\beta} = Z \quad (52)$$

siendo, de acuerdo con (35) y (37)

$$M_{\alpha\beta}^0 \sim = \{\delta_{\alpha\beta} \nu D[k^x(\mathbf{v}_0) + k^y(\mathbf{v}_1)] + D(1 - \nu)[k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_0) + k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}_1)]\} \sim \quad (53)$$

$$Q_\alpha^0 \sim = \{D_0[k_\alpha^x(\mathbf{v}_0) + k_\alpha^y(\mathbf{v}_1)]\} \sim \quad (54)$$

y al considerar la relación entre \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_0 dada por (51) se deduce:

$$M_{\alpha\beta}^0 \sim = \{\delta_{\alpha\beta} \nu D[k^x(\mathbf{v}_0) + k^y(\mathbf{v}^{\gamma\delta}(\mathbf{y}))k_{\gamma\delta}^x(\mathbf{v}_0) + k^y(\mathbf{v}^{3\gamma}(\mathbf{y}))k_\gamma^x(\mathbf{v}_0)]\} \sim + \\ \{D(1 - \nu)[k_{\alpha\beta}^x(\mathbf{v}_0) + k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}^{\gamma\delta}(\mathbf{y}))k_{\gamma\delta}^x(\mathbf{v}_0) + k_{\alpha\beta}^y(\mathbf{v}^{3\gamma}(\mathbf{y}))k_\gamma^x(\mathbf{v}_0)]\} \sim \quad (55)$$

$$Q_\alpha^0 \sim = \{D_0[k_\alpha^x(\mathbf{v}_0) + k_\alpha^y(\mathbf{v}^{\gamma\delta}(\mathbf{y}))k_{\gamma\delta}^x(\mathbf{v}_0) + k_\alpha^y(\mathbf{v}^{3\gamma}(\mathbf{y}))k_\alpha^x(\mathbf{v}_0)]\} \sim \quad (56)$$

Las expresiones (55) y (56) se pueden escribir en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} m_{11}^0 \sim \\ m_{22}^0 \sim \\ m_{12}^0 \sim \\ q_1^0 \sim \\ q_2^0 \sim \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} \sim & K_{12} \sim & K_{13} \sim & K_{14} \sim & K_{15} \sim \\ K_{21} \sim & K_{22} \sim & K_{23} \sim & K_{24} \sim & K_{25} \sim \\ K_{31} \sim & K_{32} \sim & K_{33} \sim & K_{34} \sim & K_{35} \sim \\ K_{41} \sim & K_{42} \sim & K_{43} \sim & K_{44} \sim & K_{45} \sim \\ K_{51} \sim & K_{52} \sim & K_{53} \sim & K_{54} \sim & K_{55} \sim \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}^x(\mathbf{v}_0) \sim \\ k_{22}^x(\mathbf{v}_0) \sim \\ k_{12}^x(\mathbf{v}_0) \sim \\ k_1^x(\mathbf{v}_0) \sim \\ k_2^x(\mathbf{v}_0) \sim \end{bmatrix} \quad (57)$$

Las expresiones de los términos de la matriz de rigidez antes de aplicar la operación de media sobre el dominio Ω se muestran en la tabla 1.

Se puede comprobar haciendo uso del teorema de reciprocidad de Betti que la matriz de rigidez es simétrica. Una vez conocida esta el cálculo de la placa con propiedades periódicas se lleva a cabo poniendo como características constitutivas equivalentes a esta periodicidad la matriz de rigidez de coeficientes constantes definida en (57). Se observa que, a diferencia de materiales ortótropos, existe una relación de rigidez cruzada entre las deformaciones de flexión y cortante y los esfuerzos correspondientes.

4 EJEMPLO DE APLICACIÓN

El cálculo de las soluciones $\mathbf{v}^{\alpha\beta}$ y $\mathbf{v}^{3\alpha}$ del problema constituido por la suma de las ecuaciones (47) y (48) juntamente con las condiciones periódicas de contorno puede resolverse numéricamente mediante la aplicación del método de los elementos finitos. Entre las numerosas publicaciones sobre el método se cita la clásica referencia [21], en la que se puede consultar los detalles teóricos, computacionales y de notación que se utilizan aquí. No obstante existen numerosos programas generales de computador del método de los elementos finitos (SAP200, ABAQUS,

Elementos de la primera fila		Elementos de la segunda fila	
K_{11}	$D[1 + k_{11}^y(\mathbf{v}^{11}) + \nu k_{22}^y(\mathbf{v}^{11})]$	K_{21}	$D[\nu + k_{22}^y(\mathbf{v}^{11}) + \nu k_{11}^y(\mathbf{v}^{11})]$
K_{12}	$D[\nu + k_{11}^y(\mathbf{v}^{22}) + \nu k_{22}^y(\mathbf{v}^{22})]$	K_{22}	$D[1 + k_{22}^y(\mathbf{v}^{22}) + \nu k_{11}^y(\mathbf{v}^{22})]$
K_{13}	$2D[k_{11}^y(\mathbf{v}^{12}) + \nu k_{22}^y(\mathbf{v}^{12})]$	K_{23}	$2D[k_{22}^y(\mathbf{v}^{12}) + \nu k_{11}^y(\mathbf{v}^{12})]$
K_{14}	$D[k_{11}^y(\mathbf{v}^{31}) + \nu k_{22}^y(\mathbf{v}^{31})]$	K_{24}	$D[k_{22}^y(\mathbf{v}^{31}) + \nu k_{11}^y(\mathbf{v}^{31})]$
K_{15}	$D[k_{11}^y(\mathbf{v}^{32}) + \nu k_{22}^y(\mathbf{v}^{32})]$	K_{25}	$D[k_{22}^y(\mathbf{v}^{32}) + \nu k_{11}^y(\mathbf{v}^{32})]$
Elementos de la tercera fila		Elementos de la cuarta fila	
K_{31}	$D(1 - \nu)k_{12}^y(\mathbf{v}^{11})$	K_{41}	$D_0 k_1^y(\mathbf{v}^{11})$
K_{32}	$D(1 - \nu)k_{12}^y(\mathbf{v}^{22})$	K_{42}	$D_0 k_1^y(\mathbf{v}^{22})$
K_{33}	$D(1 - \nu)[1 + 2k_{12}^y(\mathbf{v}^{12})]$	K_{43}	$2D_0 k_1^y(\mathbf{v}^{12})$
K_{34}	$D(1 - \nu)k_{12}^y(\mathbf{v}^{31})$	K_{44}	$D[1 + k_1^y(\mathbf{v}^{31})]$
K_{35}	$D(1 - \nu)k_{12}^y(\mathbf{v}^{32})$	K_{45}	$D_0 k_1^y(\mathbf{v}^{32})$
Elementos de la quinta fila			
K_{51}	$D_0 k_2^y(\mathbf{v}^{11})$		
K_{52}	$D_0 k_2^y(\mathbf{v}^{22})$		
K_{53}	$2D_0 k_2^y(\mathbf{v}^{12})$		
K_{54}	$D_0 k_2^y(\mathbf{v}^{31})$		
K_{55}	$D_0[1 + k_2^y(\mathbf{v}^{32})]$		

Tabla 1. Elementos de la matriz de rigidez

ANSYS etc). Aquí se aplica el ANSYS versión 6.0 al caso de la celda elemental⁴ definida en la figura 3

Los datos geométricos del ejemplo de aplicación se definen en la tabla siguiente con las unidades: metros y kiloNewtons:

α	L_1	L_2	e	e_1	e_2	$b_1 = b_2$
$\frac{\pi}{3}$	5,00	4,00	0,20	0,40	0,30	0,50

Tabla 2. Datos del ejemplo de aplicación

Las características elásticas del material son constantes en toda la celda elemental, $E =$

⁴En este caso, como en otros en los que el dominio de la celda elemental es sencillo, es posible utilizar una transformación geométrica *ad hoc* que convierta Ω^e en un dominio simple Ω , como el cuadrado de lado unidad. En este ejemplo de aplicación las fórmulas (24) que se podrían utilizar serían las siguientes:

$$y_1 = \frac{1}{a\varepsilon}(x_1 - x_2 \tan \alpha), \quad y_2 = \frac{1}{b\varepsilon} \frac{x_2}{\cos \alpha}$$

Por consiguiente, las expresiones de las deformaciones $k_{\alpha\beta}^y$ y k_α^y se modificarían sustituyendo los operadores del

texto $\frac{\partial}{\partial y_1}$ y $\frac{\partial}{\partial y_2}$ por $\frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial y_1}$ y por $-\frac{\tan \alpha}{a} \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{1}{b \cos \alpha} \frac{\partial}{\partial y_2}$ respectivamente.

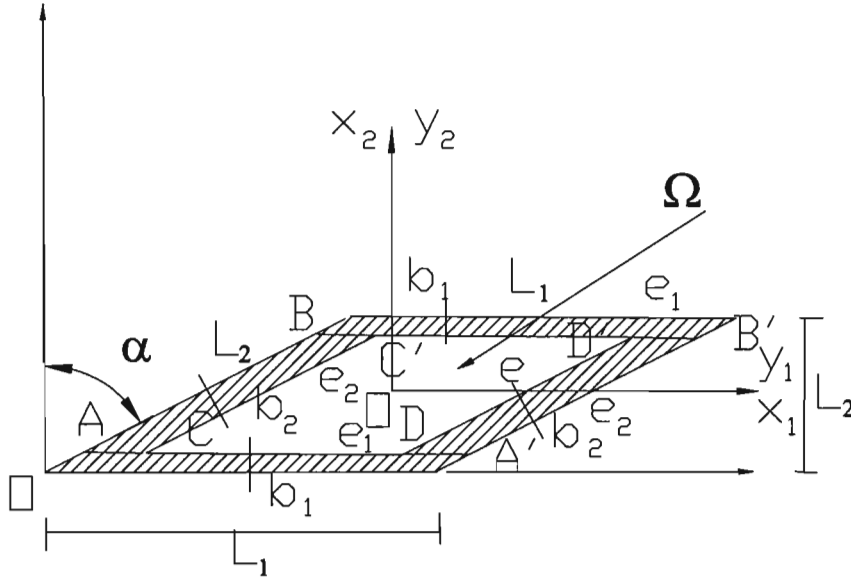


Figura 3. Celda elemental amplificada de la placa periódica

3×10^7 ; $\nu = 0,20$, con lo que resultan las constantes de la placa:

$$D = 6,944 \times 10^{-4} E; \quad D^1 = 5,555 \times 10^{-3} E; \quad D^2 = 2,344 \times 10^{-3} E$$

$$D_0 = 6,944 \times 10^{-2} E; \quad D_0^1 = 0,139 E; \quad D_0^2 = 0,104 E$$

El origen de los ejes de coordenadas que se adoptan está situado en el centro de gravedad de la celda Ω con Oy_1 paralelo al lado de longitud L_1 y el Oy_2 perpendicular al anterior en el plano medio de la placa. El eje Oz es perpendicular al plano medio de la placa.

Las cargas que se aplican en cada uno de los seis cálculos auxiliares de la celda amplificada son:

1. Cálculo de v^{11}

- Cuchillos de momentos G_1 a lo largo de CC' y DD' de valor respectivamente

$$\mp(D^2 - D) \cos \alpha$$

- Cuchillos de momentos G_2 a lo largo de CD y $C'D'$ de valor respectivamente

$$\mp \nu(D^1 - D)$$

- Cuchillos de momentos G_2 a lo largo de AC y DA' de valor

$$\nu(D^2 - D^1)$$

y a lo largo de BC' y D'B'

$$-\nu(D^2 - D^1)$$

- Cuchillos de momentos G_2 a lo largo de CC' y DD' de valor respectivamente

$$\pm\nu(D^2 - D)\text{sen}\alpha$$

2. Cálculo de \mathbf{v}^{22}

- Cuchillos de momentos G_1 a lo largo de CC' y DD' de valor respectivamente

$$\mp\nu(D^2 - D)\cos\alpha$$

- Cuchillos de momentos G_2 a lo largo de CD y C'D' de valor respectivamente

$$\mp(D^1 - D)$$

- Cuchillos de momentos G_2 a lo largo de AC y DA' de valor

$$(D^2 - D^1)$$

y a lo largo de BC' y D'B'

$$-(D^2 - D^1)$$

- Cuchillos de momentos G_2 a lo largo de CC' y DD' de valor respectivamente

$$\pm(D^1 - D)\text{sen}\alpha$$

- Cálculo de \mathbf{v}^{12} y \mathbf{v}^{21}

- Cuchillos de momentos G_1 a lo largo de CD y C'D' de valor respectivamente

$$\mp\frac{1}{2}(1 - \nu)(D^1 - D)$$

- Cuchillos de momentos G_1 a lo largo de AC y DA' de valor

$$\frac{1}{2}(1 - \nu)(D^2 - D^1)$$

y a lo largo de BC' y D'B'

$$-\frac{1}{2}(1 - \nu)(D^2 - D^1)$$

- Cuchillos de momentos G_1 a lo largo de CC' y DD' de valor respectivamente

$$\pm\frac{1}{2}(1 - \nu)(D^1 - D)\text{sen}\alpha$$

- Cuchillos de momentos G_2 a lo largo de CC' y DD' de valor respectivamente

$$\mp\frac{1}{2}(1 - \nu)(D^2 - D)\cos\alpha$$

3. Cálculo de v^{31}

- Cuchillos de cargas verticales Z a lo largo de CC' y DD' de valor respectivamente

$$\mp(D_0^2 - D_0) \cos \alpha$$

4. Cálculo de v^{32}

- Cuchillos de cargas verticales Z a lo largo de CD y $C'D'$ de valor respectivamente

$$\mp(D_0^1 - D_0)$$

- Cuchillos de cargas verticales Z a lo largo de AC y DB de valor

$$(D_0^2 - D_0^1)$$

y a lo largo de BC' y $D'B'$

$$-(D_0^2 - D_0^1)$$

- Cuchillos de cargas verticales Z a lo largo de CC' y DD' de valor respectivamente

$$\pm(D_0^2 - D_0) \sin \alpha$$

Las condiciones de contorno que se introducen son de tipo periódico, es decir, igualdad de giros y desplazamientos entre puntos de contorno de igual ordenada pero cuyas diferencias de abscisas sea L_1 o de igual abscisa pero con diferencias entre sus ordenadas de L_2 . Además para asegurar la unicidad de la solución se impone al desplazamiento y a los giros valores nulos en el origen de coordenadas de la celda Ω .

Se utiliza en todos los casos de carga una malla de elementos finitos de 220×220 elementos paralelogramos iguales tipo SHELL181 del programa ANSYS, con tres grados de libertad por nudo. Los resultados pueden ser sensibles al número de elementos utilizados. Con objeto de evitar problemas de enmascaramiento numérico debido a la rigideces distintas de cortante y de flexión se aplicó la técnica de integración selectiva reducida.

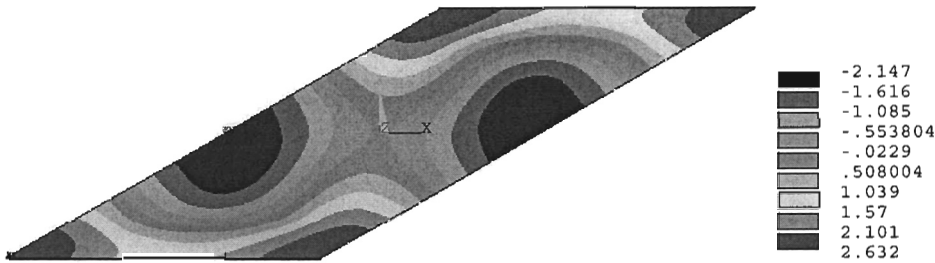


Figura 4. Curvas de nivel de la flecha del caso v^{11}

A partir de los resultados de cada cálculo $\theta_1^{AB}, \theta_2^{AB}, w^{AB}$ con $A = 1, 2, 3; B = 1, 2$ se obtienen las deformaciones $k_{\alpha\beta}^{yAB}, k_{\alpha}^{yAB}, k_{\alpha}^{yAB}$ mediante las expresiones (31) y (32), y por consiguiente aplicando las expresiones de la tabla 1 se deduce la matriz de rigidez homogeneizada

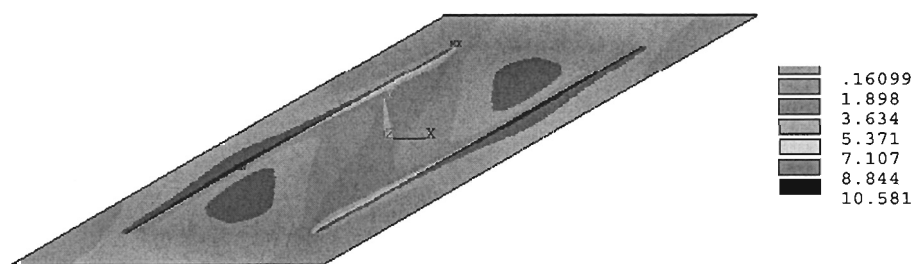


Figura 5. Curvas de nivel de la curvatura k_{11} del caso v^{11}

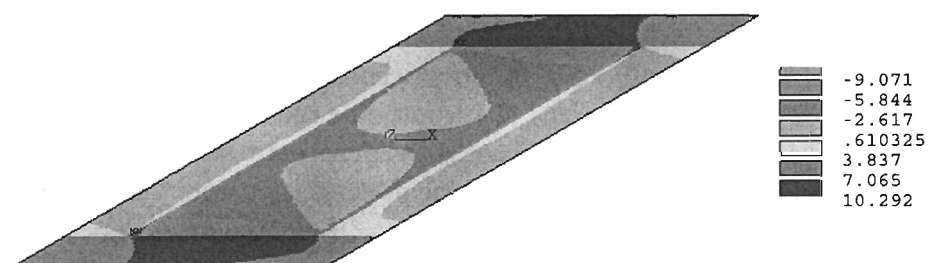


Figura 6. Curvas de nivel de la curvatura k_{22} del caso v^{11}

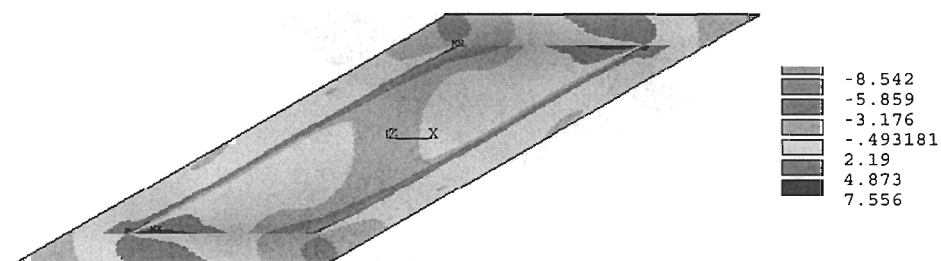


Figura 7. Curvas de nivel de la curvatura k_{12} del caso v^{11}

o relación constitutiva entre esfuerzos y deformaciones de la celda elemental de la placa equivalente referida a los ejes Oy_1y_2 . Se presenta a continuación la matriz de rigidez \mathbf{K}^{\sim} que relaciona los momentos de flexión y de torsión con las correspondientes deformaciones (curvaturas):

$$\begin{bmatrix} 0.107E+06 & 0.331E+06 & -0.633E+05 & 0 & 0 \\ 0.331E+06 & 0.166E+07 & -0.216E+06 & 0 & 0 \\ -0.633E+05 & -0.216E+06 & 0.645E+06 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.835E+06 & 0.236E+07 \\ 0 & 0 & 0 & 0.237E+07 & 0.172E+09 \end{bmatrix} \cdot 10^7$$

Con un objetivo ilustrativo se presentan en las figuras 4 a la 7 las líneas de nivel de las flechas así como las de las curvaturas de flexión y torsión del caso de carga \mathbf{v}^{11} .

5 CONCLUSIONES

En la ingeniería civil y en la arquitectura aparecen con frecuencia estructuras con propiedades variables de carácter espacialmente periódicas. Si bien el cálculo de estas estructuras se puede llevar a cabo de forma directa, ello puede exigir una la utilización intensiva de importantes recursos computacionales. Por este motivo su cálculo se efectúa usualmente substituyendo las propiedades variables periódicamente de la estructura por otras constantes, obtenidas bien intuitivamente o por medio de procedimientos heurísticos o ya mediante considerando sus valores medios. Estas prácticas pueden conducir a resultados pocos fiables. Con objeto de evitar inconsistencias en estos cálculos se deduce un procedimiento para la obtención de las constantes de flexión y cortante de la placa homogeneizada basada en la metodología de la homogeneización. La consistencia y convergencia del método que se propone así como la facilidad de automatización del cálculo de las constantes efectivas de la placa homogeneizada, lo convierte en una herramienta conveniente para su uso en la práctica profesional. Se muestra asimismo una formulación explícita de la aplicación de este método a la placa de Mindlin-Reissner.

REFERENCIAS

- [1] Bensoussan, A., Lions, J. L. and Papanicolaou, G. *Asymptotic Analysis for periodic Structures*. North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [2] Bourgat, J.F. Numerical experiments of the homogenization method for operator with periodic coefficients. Report 77, Rapport et Recherche. I.N.R.I.A París, 1978.
- [3] Caillerie, D. Thin Elastic and Periodic Plates. *Mathematical Methods in the Applied Science*, (3):159–191, 1984.
- [4] Chacha, D. and Sánchez-Palencia, E. Overall behavior of elastic plates with distributed fissures. *Asymptotic Analysis*, 5(5):381–396, 1992.
- [5] Ciarlet, P. G. and Sánchez-Palencia, E.(eds.). *Applications of multiple scaling mechanics*. Proc. of the Intl. Conf. held at l'École Normale Supérieure, Paris, November 24-28, 1986. Masson, Paris, 1987.
- [6] Ciarlet, P.G. and Destuynder, P. A justification of the two dimensional linear plate model. *Journal de Mécanique*, 18:315–344, 1979.

- [7] Ciarlet, P.G. and Kesavan, S. Two-dimensional approximations of three-dimensional eigenvalue problem in plate theory. *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering*, 26:145–172, 1981.
- [8] Duvaut, G. Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus. applications a l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique. homogénéisation. In *Theoretical and Applied Mechanics. W. T. Koiter*, pages 119–131, North Holland, Amsterdam, 1978.
- [9] Duvaut, G. and Metellus, A. M. Homogénéisation d'une plaque mince en flexion de structure périodique et symétrie. Report Serie A, 283 89-12, Comptes Rendues Academie Sciences Paris, 1976.
- [10] Lewinski, T. Effective stiffnesses of transversely non-homogeneous plates with unidirectional periodic structure. *International Journal Solids and Structures*, 32(22):3261–3287, 1995.
- [11] Lewinski, T. and Telega, J. J. Asymptotic method of homogenization of fissured elastic plates. *Journal of Elasticity*, 19(1):37–62, 1988.
- [12] Lewinski, T. and Telega, J. J. Homogenization and effective properties of plates weakened by partially penetrating fissures: asymptotic analysis. *International Journal of Engineering Science*, 29(9):1129–1155, 1991.
- [13] Lewinski, T. and Telega, J. J. *Plates, laminates and shells. Asymptotic Analysis and homogenization*, volume 52 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*, page 739. World Scientific Publishing Co., Inc. River Edge, NJ, 2000.
- [14] Lobo, M., Pérez, M. E. and Samartín, A. Problemas de homogeneización en la Ingeniería. Una experimentación numérica (Homogenization problems in Engineering. A numerical experimentation). *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 7:181–188, 1991.
- [15] Oleonik, A., Shamaev, S. and Yosihan, G. A. *Mathematical Problems in Elasticity and Homogenization*. North-Holland, London, 1992.
- [16] Samartín, A. *Cálculo de Estructuras de Puentes de Hormigón*. Editorial Rueda, Madrid, 1983.
- [17] Samartín, A. *Curso de Elasticidad*. Editorial Bellisco, Madrid, 1990.
- [18] Sánchez-Palencia, E. *Non-homogeneous media and Vibration theory*. Lecture Notes in Physics. No. 12. Springer Verlag, Berlin, 1980.
- [19] Sánchez-Palencia, E. Homogenization in mechanics. A survey of solved and open problems. *Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino*, 44(1):1–45, 1986.
- [20] Sánchez-Palencia, E. and Zaoui, A.(Eds.). *Homogenization techniques for composite media*. Papers from the course held in Udine, July 1-5, 1985. Springer Verlag, Berlin, 1987.
- [21] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.